EXERCICE N°1 : 25' 4 points

La durée de vie (en années) d'un appareil électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) a) Déterminer λ pour que $p(X \geq 8) = 0{,}28$.

b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inférieure ou égale à trois mois.

c) Déterminer T tel que $p(X \leq T) = 4\, p(X \geq T)$.

2) Sachant qu'un appareil a déjà dépassé six ans, qu'elle est la probabilité pour qu'il fonctionne quatre ans de plus.

3) Une personne achète n appareils identiques ($n > 0$) du modèle précédent.

On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.

a) Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que huit ans ?

b) Déterminer n pour que $p_n \geq 0{,}998$.

EXERCICE N°2 : 25' 4 points

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché, peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer λ sachant que $p(T \leq 10) = 0{,}7$.

2) Sachant qu'un touriste a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.

3) On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes. Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

EXERCICE N°3 : 30' 6 points

Une usine fabrique des appareils, un contrôle de qualité a montré que 14 % des appareils présentent un défaut D_1 et 10 % présentent le défaut D_2 et 4 % présentent les deux défauts D_1 et D_2. Un appareil est défectueuse s'il présente au moins l'un des deux défauts.

On note D_1 : " l'appareil présente le défaut D_1" ; D_2 : " L'appareil présente le défaut D_2 ".

1) Les événements D_1 et D_2 sont-ils indépendants ?

2) Sachant que l'appareil présente le défaut D_1, calculer la probabilité pour qu'il présente le défaut D_2 .

3) Montrer que la probabilité de D : " l'appareil est défectueuse " est $\frac{1}{5}$.

4) Un commerçant reçoit n appareils indépendants, $n \geq 2$ pour l'exposer l'un à côté de l'autre. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre d'appareils défectueuses.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Le commerçant veut que sur sa commande la probabilité p_n d'avoir au moins un appareil défectueuse reste inférieur à 50 %, déterminer la maximale de n.

5) La durée de vie d'un appareil défectueuse suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ et la durée de vie en année d'un appareil non défectueuse suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-5}$. On achète un appareil au hasard, on désigne par Y la variable aléatoire qui

indique sa durée de vie en année.

a) Montrer que pour $t \in [0,+\infty[$ on a : $p(Y \geq t) = \frac{1}{5} e^{-\lambda_1 t} + \frac{4}{5} e^{-\lambda_2 t}$.

b) Calculer la probabilité que l'appareil ne tombe pas en panne au bout de 5 ans.

c) Sachant que l'appareil acheté dépasse 5 ans , qu'elle est la probabilité qu'il soit défectueuse.